12|1|16

(E) $a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$, $x_0 \in I$

Η πρώτη δουλειά που κάνουμε, εάν το a_2 μηδενίζεται για x_0.

Έστω ότι x_0 (κανονικό) ανώμαλο σημείο $\to$ $a_2(x) = 0$

$\to$ κάποια από τα $\frac{a_2}{a_0}, \frac{a_1}{a_0}$ όχι αναλ. στο x_0.

ή

<u>Θεώρημα 2</u> (σελ. 249-250)

Ας είναι x_0 κανονικό ανώμαλο σημείο:

$$A_1(x) = \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}(x - x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (x - x_0)^k, \quad 0 < |x - x_0| < R_1$$

$$A_0(x) = \frac{\alpha_0(x)}{\alpha_2(x)}(x - x_0)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} q_k (x - x_0)^k, \quad 0 < |x - x_0| < R_2$$

Ενδεικτική εξίσωση $p(\lambda)=\lambda^2+(p_0-1)\lambda+q_0=0 \rightsquigarrow Re\lambda_2 \le Re\lambda_1$

Τότε:

(A) Η (E) έχει μια λύση της μορφής $y_1(x)=|x-x_0|^{\lambda_1}\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$

$c_0=1$, $R \geq \min\{R_1,R_2\}$

(B) Μια άλλη λύση της (E) που είναι γραμμικώς ανεξάρτητη της y_1

(i) $\lambda_1-\lambda_2 \notin \mathbb{Z}$: $y_2(x)=|x-x_0|^{\lambda_2}\sum_{n=0}^{\infty} d_n(x-x_0)^n$, $d_0=1$

(ii) $\lambda_1=\lambda_2$: $y_2(x)=y_1(x)\log|x-x_0|+|x-x_0|^{\lambda_2}\sum_{n=0}^{\infty} d_n(x-x_0)^n$, $d_0=0$

(iii) $\lambda_1-\lambda_2 \in \mathbb{N}^*$: $y_2(x)=cy_1(x)\log|x-x_0|+|x-x_0|^{\lambda_2}\sum_{n=0}^{\infty} d_n(x-x_0)^n$, $d_0=1$

<u>Παράδειγμα 1</u>

σελίδα 257

$2x^2y''+(x-x^2)y'-y=0 \quad (x_0=0)$

$\alpha_2(x)=2x^2$, προφανώς μηδενίζεται στο x_0, άρα ανώμαλο σημείο

$\alpha_1(x)=x-x^2$, $\alpha_0(x)=-1$.

Έχουμε $A_1(x)=\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}(x-0)=\frac{x-x^2}{2x^2}\cdot x=\frac{x^2(1-x)}{2x^2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x \rightsquigarrow$

$p_0=1/2$.

$A_0(x)=\frac{\alpha_0(x)}{\alpha_2(x)}(x-0)^2=-\frac{1}{2x^2}\cdot x^2=-\frac{1}{2} \rightsquigarrow q_0=-1/2$.

$\lambda^2+(1/2-1)\lambda-1/2=0 \rightsquigarrow \lambda^2-1/2\lambda-1/2=0 \rightarrow \lambda_1=1, \ \lambda_2=-1/2$

$y_1(x)=|x-0|^1\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-0)^n$, $c_0=1$

$y_1(x)=|x|\sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n$ για $x \neq 0$

$2x^2y_1''(x)+(x-x^2)y_1'(x)-y_1(x)=$

$2x^2\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_nx^{n+1}\right)''+(x-x^2)\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_nx^{n+1}\right)'-\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_nx^{n+1}\right)=$

$2x^2\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+1)nx^{n-1}\right)+(x-x^2)\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+1)x^n\right)-\sum_{n=0}^{\infty} c_nx^{n+1}=$

$\sum_{n=0}^{\infty} 2c_n(n+1)nx^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+1)x^{n+1}-\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+1)x^{n+2}}_{\sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1}\cdot nx^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty} c_nx^{n+1} \rightsquigarrow$

$\sum_{n=1}^{\infty} 2c_n(n+1)nx^{n+1}+\cancel{c_0 1\cdot x}+\sum_{n=1}^{\infty} c_n(n+1)x^{n+1}-\sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1}\cdot nx^{n+1}-\cancel{c_0x}-\sum_{n=1}^{\infty} c_nx^{n+1}=0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1}\left[2c_n(n+1)+c_n(n+1)-nc_{n-1}-c_n\right]=0$$

$c_n(2n+2+n+1-1)=nc_{n-1}$, $n\geq 1$.

$(3n+2)c_n=nc_{n-1}$, $n\geq 1$ $c_0=1$ αναδρομικός τύπος.

*(Έχει γίνει κάποιο λάθος στις πράξεις και το βιβλίο έχει διαφορετικό αποτέλεσμα, να διαβαστεί από το βιβλίο).

Τώρα για την $y_2(x)$ από (B)(ii) έχουμε:

$y_2(x)=|x-0|^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty} d_n(x-x_0)^n$

$\underline{x>0}$ $y_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^{n-1/2}$, $d_0=1$.

$2nd_n-d_{n-1}=0$, $n\geq 1$ $d_n=\frac{1}{2n}d_{n-1}$, $n\geq 1$.

$$\left.\begin{aligned} d_1&=\frac{1}{2}d_0\\ d_2&=\frac{1}{2\cdot 2}d_1\\ d_3&=\frac{1}{2\cdot 3}d_2\\ &\cdots\\ d_n&=\frac{1}{2n}d_{n-1}\end{aligned}\right\} d_n=\frac{1}{2^n n!}$$

$$y_2(x)=|x|^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}x^n$$
$$=|x|^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x/2)^n}{n!}$$, το ανάπτυγμα του $e^{x/2}$

Παράδειγμα 3
σελίδα 261

$$\underbrace{x^2y''-xy'+8(x^2-1)y}_{L(y)}=0 \quad , x_0=0.$$

$\alpha_2(x)=x^2$, $\alpha_1(x)=-x$, $\alpha_0(x)=8(x^2-1)$.

$A_1(x)=\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}\cdot x=\frac{-x}{x^2}\cdot x=-1\rightsquigarrow p_0$ $R_1=+\infty$

$R_2=+\infty$

$A_0(x)=\frac{8(x^2-1)}{x^2}x^2=-8+8x^2\rightsquigarrow q_0=-8$

$\lambda^2+(p_0-1)\lambda+q_0=\lambda^2-2\lambda-8$ → $\lambda_1=4$, $\lambda_2=-2$.

$\underline{x>0}$. $y_1(x)=x^4\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+4}$, $c_0=1$.

Αναδρομικός τύπος $c_n=\frac{-8}{n(n+6)}c_{n-2}$, $n=2,\ldots$ $c_1=0$

Όταν $\cdot\, n=2k$ $c_{2k}=\frac{-8}{2k(2k+6)}c_{2(k-1)}$, $k\geq 1$.

$\cdot\, n = 2k+1 \quad c_{2k+1} = \dfrac{-8}{2(k+1)(2k+7)} \cancel{c}_{2k-1}, \; k \geq 1 \Rightarrow c_{2k+1} = 0, \; k \geq 0$

Άρα η λύση δεν έχει όρους περιττής τάξης

$y_1(x) = \underbrace{|x|^4 \sum_{k=0} c_{2k} x^{2k}}$

$y_1(x) = x^4 \left(c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k} x^{2k} \right)$

Από (B)(iii)

$\underline{x>0}$

$$\text{πολ/σω} \begin{cases} 8(x^2-1) \to & y_2(x) = c\, y_1(x) \log x + \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^{n-2} \\ -x \to & y_2'(x) = c y_1' \log x + c y_1 \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} (n-2) d_n x^{n-1} \\ x^2 \to & y_2''(x) = c y_1'' \log x + 2c y_1 \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} c y_1 + \sum_{n=0}^{\infty} (n-2)(n-1) d_n \cdot x^{n-2} \end{cases}$$

$\cancel{\log x\,(L(y_1))} \to 0$

$0 = 8(x^2-1) \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^{n-2} + x c\, y_1(x) \frac{1}{x} - \sum_{n=0}^{\infty} (n-2) d_n x^{(n-2)} + 2x c y_1'(x) - c y_1(x) + \sum_{n=0}^{\infty} (n-2)(n-1) d_n x^n$

$\downarrow \quad c\, x^4 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad\qquad \downarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

$-\frac{1}{x} \Big\{ -5d_1 + 8(-d_2 + d_0)x + (-9d_3 + 8d_1)x^2 + 8(-d_4 + d_2)x^3 + (-5d_5 + 8d_3)x^4 + \sum_{n=0}^{\infty} [n(n+6) d_{n+6} + 8 d_{n+4} + 2c(n+3) c_n] \, x^{n+5} \Big\} = 0.$

$n=0$, έχω x^5, δηλαδή:

$-5d_1 = 0 \rightsquigarrow d_1 = 0$

$d_0 = d_2 = 1$

$-9d_3 + 8d_1 = 0 \Rightarrow d_3 = 0$

$d_4 = d_2 = 1$

$-5d_5 + 8d_3 = 0 \Rightarrow d_5 = 0$

$n(n+6) d_{n+6} + 8 d_{n+4} = -2c(n+3) c_n, \; n = 0, 1, \ldots$

$n=0 \quad 8 d_4 = -2c\, 3 \cdot 1$

$8 \cdot 1 = -2c \cdot 3 \rightsquigarrow c = -4/3.$

$n = 2k+1$

$(2k+1) d_{2k+7} = -8 d_{2k+5}, \quad k = 0, 1, \ldots$

$d_{2n+1} = 0.$

Παράδειγμα 4
σελίδα 264

$2x^2y'' + (3x+1)y' - y = 0$, για "μεγάλα" x
θέτω $w = 1/x$, μπορούμε να προσεγγίσουμε το $+\infty$.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dw}\,\frac{dw}{dx} = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dw} = -w^2\frac{dy}{dw}$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dw}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dw}{dx} = \frac{d}{dw}\left(-w^2\frac{dy}{dw}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$w^4\frac{d^2y}{dw^2} + 2w^3\frac{dy}{dw} = y''$$

$$2w^2\frac{d^2y}{dw^2} + (w - w^2)\frac{dy}{dw} - y = 0 \quad , w \neq 0 , R = +\infty$$

(Που είναι το παράδειγμα 1).

$$y_1(w) = |w| \sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n$$

$$y_1(x) = \frac{1}{|x|} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{1}{x^n} \quad , x \neq 0$$

$$y_2(w) = |w|^{-1/2} e^{w/2}$$

$$y_2(x) = \sqrt{|x|}\, e^{1/2x} \quad , x \neq 0 .$$

- $(1-x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0$ (Legendre)

$x_0 = 0$: ομαλό σημείο
$\rightsquigarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

$$c_{n+2} = -\frac{(p-n)(p+n+1)}{(n+1)(n+2)} c_n \quad , n \geq 0$$

$$c_{2k+2} = -(p-2k) \ldots \qquad c_{2k+1} = \ldots$$

Μ.Δ.Ε γραμμικές α' τάξης σελίδα 407

$A(x,y)z_x + B(x,y)z_y + C(x,y)z = \Phi(x,y)$ (Μόνο με αυτή θα ασχοληθούμε όχι με τις παρακάτω)

$A, B, C, \Phi : \underline{\Omega} \to \mathbb{R}$ συνεχής

τόπος εν $\mathbb{R}^2$

Τουλάχιστον μια από τις A, B δεν μηδενίζεται πουθενά στο $\underline{\Omega}$.

ΗΜΙΓΡΑΜΜΙΚΗ

$P(x,y,z)z_x + Q(x,y,z)z_y = R(x,y,z)$

ΣΧΕΔΟΝ ΓΡΑΜΜΙΚΗ

$A(x,y)z_x + B(x,y)z_y = R(x,y,z)$

(Ε) $\alpha z_\xi + C z = \varphi$ // $\alpha, C, \varphi \in C(\underline{\Omega})$, $\alpha(\xi,\eta) \neq 0$ $(\xi,\eta) \in \underline{\Omega}$

$\alpha(\xi,\eta)\, z_\xi(\xi,\eta) + C(\xi,\eta)\, z(\xi,\eta) = \varphi(\xi,\eta)$

$$z(\xi,\eta) = e^{-\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{C(s,\eta)}{\alpha(s,\eta)} ds} \left[z(\xi_0,\eta) + \int_{\xi_0}^{s} \frac{\varphi(\xi,\eta)}{\alpha(\xi,\eta)} e^{\int_{\xi_0}^{u} \frac{C(u,\eta)}{\alpha(u,\eta)} du} ds \right]$$